Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2024-2025 (787AA)
Appello 2

23/01/2025

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = e^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   Sol. $P = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.
2. Dire, giustificando la risposta, se è continua la funzione
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{2}x)-1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ -1 \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$
   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.
3. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$
   $$\underbrace{\sin(x^{-1})}_{a}, \quad \underbrace{\sin(e^{-x})}_{b}, \quad \underbrace{\log x}_{c}, \quad \underbrace{\log(1+e^x)}_{d}.$$
   Sol. $b \ll a \ll c \ll d$.
4. Calcolare il seguente integrale indefinito $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$.
   Sol. $I = -2\log|x-1| + 3\log|x-2| + c$.
5. Risolvere $x'(t) + \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} x(t) = 0$.
   Sol. $x(t) = ce^{-\frac{1}{\cos(t)}}$.
6. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital, calcolare il seguente limite: $\ell = \lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^4}$.
   Sol. $\ell = -1/12$
7. Calcolare $\ell = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{h}{2}} \arcsin(x) dx$.
   Sol. $\ell = \frac{\pi}{6}$.
8. Derivare la funzione $f(x) = \tan(1 + \log(x^2))$.
   Sol. $f'(x) = \frac{2}{x}\left(1 + \tan^2(1 + 2\log x)\right)$.
9. Disegnare ed evidenziare la regione di piano descritta da $x^2 - 1 \leq y \leq -x^2$. Scrivere i valori dei punti di intersezione con gli assi e dei punti di intersezione tra le curve disegnate.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Calcolare il seguente integrale indefinito $I = \int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$.
   Sol. $I = -3\log|x-2| + 4\log|x-3| + c$.

2. Risolvere $x'(t) + \frac{2\sin(t)}{\cos^2(t)}x(t) = 0$.
   Sol. $x(t) = ce^{-\frac{2}{\cos(t)}}$.

3. Calcolare $\ell = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{h}{2}} \arcsin(x)dx$.
   Sol. $\ell = \frac{\pi}{4}$.

4. Derivare la funzione $f(x) = \tan(1+\log(x^3))$.
   Sol. $f'(x) = \frac{3}{x}\left(1+\tan^2(1+3\log x)\right)$

5. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = e^{\tan\left(\frac{x}{3}\right)}$.
   Sol. $P = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} + o(x^2)$.

6. Dire, giustificando la risposta, se è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{3}x)-1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ \frac{3}{2} \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$.

7. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\log x}_{a}, \quad \underbrace{\sin(e^{-x})}_{b}, \quad \underbrace{\sin(x^{-2})}_{c}, \quad \underbrace{\log(1+e^{4x})}_{d}.$$

   Sol. $b \ll c \ll a \ll d$.

8. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital, calcolare il seguente limite: $\ell = \lim_{x\to 1} \frac{1+\log(x) - e^{x-1}}{(x-1)^2}$.
   Sol. $\ell = -1$.

9. Disegnare ed evidenziare la regione di piano descritta da $x^2 \leq y \leq -x^2 + 2$. Scrivere i valori dei punti di intersezione con gli assi e dei punti di intersezione tra le curve disegnate.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________________ **MATRICOLA:** ____________________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Dire, giustificando la risposta, se è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{5}x)-1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ -\frac{5}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{5}{2}$.

2. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\log(1+e^{6x})}_{a}, \quad \underbrace{\sin(e^{-3x})}_{b}, \quad \underbrace{\log(4x)}_{c}, \quad \underbrace{\sin(x^{-2})}_{d}.$$

   Sol. $b \ll d \ll c \ll a$.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito $I = \int \frac{x+1}{x^2-9x+20} dx$.

   Sol. $I = -5\log|x-4| + 6\log|x-5| + c$.

4. Calcolare $\ell = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{h}{2}} \arcsin(x) dx$.

   Sol. $\ell = \frac{\pi}{3}$.

5. Derivare la funzione $f(x) = \tan(1+\log(x^4))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{4}{x}\left(1+\tan^2(1+4\log x)\right)$

6. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = e^{\tan\left(\frac{x}{4}\right)}$.

   Sol. $P = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + o(x^2)$.

7. Risolvere $x'(t) + \frac{3\sin(t)}{\cos^2(t)} x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{-\frac{3}{\cos(t)}}$.

8. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital, calcolare il seguente limite: $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2+x^3)}{x^2}$.

   Sol. $\ell = -1$.

9. Disegnare ed evidenziare la regione di piano compresa tra le curve $y = x^2$ e $y = x^2 - 1$, per $x \in [-1, 1]$. Scrivere i valori dei punti di intersezione con gli assi.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Calcolare $\ell = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}^{-\frac{1}{2}+\frac{h}{2}} \arcsin(x)dx$.

   Sol. $\ell = -\frac{\pi}{6}$.

2. Derivare la funzione $f(x) = \tan(1+\log(x^5))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{5}{x}\left(1+\tan^2(1+5\log x)\right)$

3. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano centrato in $x_0 = 0$ di grado 2 della funzione $f(x) = e^{\tan\left(\frac{x}{5}\right)}$.

   Sol. $P = 1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{50} + o(x^2)$.

4. Dire, giustificando la risposta, se è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{7}x)-1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ \frac{7}{2} \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{7}{2}$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\log(8x)}_{a}, \qquad \underbrace{\log(1+e^{6x})}_{b}, \qquad \underbrace{\sin(e^{-2x})}_{c}, \qquad \underbrace{\sin(x^{-7})}_{d}.$$

   Sol. $c \ll d \ll a \ll b$.

6. Calcolare il seguente integrale indefinito $I = \int \frac{x+1}{x^2-11x+30}dx$.

   Sol. $I = -6\log|x-5| + 7\log|x-6| + c$.

7. Risolvere $x'(t) + \frac{5\sin(t)}{\cos^2(t)}x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{-\frac{5}{\cos(t)}}$.

8. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital, calcolare il seguente limite: $\ell = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \frac{1}{x-1}}{6x^2}$.

   Sol. $\ell = -1/12$.

9. Disegnare ed evidenziare la regione di piano compresa tra le curve $y = x^2$ e $y = x^2+1$, per $x \in [-1,1]$. Scrivere i valori dei punti di intersezione con gli assi.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data la funzione $f(x) = e^{-x}|x^2 - x|$.
Determinarne dominio, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e di convessià.
Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
Calcolare l'area sottesa alla curva nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Si consideri la funzione $y = f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$. Far vedere che la funzione è invertibile in $(0, 1)$ e calcolare l'inversa $x = g(y)$. Si dica a cosa è asintoticamente equivalente la funzione $g(y) - 1$ per $y \to +\infty$.

Sol. 1 $f(x)$ è definita per le $x \in \mathbb{R}$. Non è né pari né dispari. È sempre non negativa (quindi limitata inferiormente da zero) Prende valore zero per $x = 1$ e $x = 0$, quindi minimo assoluto $\min f = 0$.
Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, (asintoto orizzontale), mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, quindi la funzione è illimitata superiormente e dunque $\sup f = +\infty$.
Osserviamo che da definizione di modulo

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1)e^{-x} & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 1 \\ -x(x-1)e^{-x} & \text{se} \quad x \in (0,1) \end{cases} .$$

La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(-x^2 + 3x - 1) & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 1 \\ e^{-x}(x^2 - 3x + 1) & \text{se} \quad x \in (0,1) \end{cases} .$$

In $x = 0$ ed $x = 1$ la funzione non è derivabile in quanto le derivate destra e sinistra esistono finite ma non coincidono. Sono $f' = \pm 1$ destra e sinistra in $x = 0$, rispettivamente, e $f' = \pm 3e^{-1}$ destra e sinistra in $x = 1$, rispettivamente. Quindi $x = 0$ e $x = 1$ sono punti angolosi.
La derivata si annulla in $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ e $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0, 1)$. Studiandone il segno di ha che la funzione cresce in $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ e in $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, decresce in $(-\infty, 0)$, $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$. I punti $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ sono punti di massimo relativo.
Distinguendo i casi, si ha che

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 - 5x + 4) & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 1 \\ -e^{-x}(x^2 - 5x + 4) & \text{se} \quad x \in (0,1) \end{cases} .$$

Quest'ultima si annulla in $x = 1$ e $x = 4$. Gli intervalli di concavità sono $(0, 1)$, $(1, 4)$, quelli di convessità $(-\infty, 0)$, $(4, \infty)$.
La primitiva di f su $[1, 2]$ è data da $-e^{-x}(x^2 + x + 1)$. La valutazione negli estremi dà quindi

$$\int_1^2 f(x)dx = -7e^{-2} + 3e^{-1}.$$

Sol. 2 La funzione è definita per $x > 0$, e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{2\log x - 2}{x \log^3 x}.$$

La funzione dunque è monotona crescente in $(0, 1)$ e (e, ∞), monotona decrescente in $(1, e)$. Quindi in $(0, 1)$ è invertibile.
Per l'inversa si ponga $\frac{1}{\log x}$, quindi $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$. Pertanto risolvendo rispetto a t si ha $t = 1 \pm \sqrt{y}$, e quindi $x(y) = e^{\frac{1}{1\pm\sqrt{y}}}$. Per l'inversione sull'intervallo $(0, 1)$ la scelta corretta è il segno negativo, quindi in definitiva

$$x = g(y) = e^{\frac{1}{1-\sqrt{y}}}$$

Per $y \to +\infty$, $e^{\frac{1}{1-\sqrt{y}}} - 1 \sim -\frac{1}{\sqrt{y}}$.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 23-01-25

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE II

1. Sia data la funzione $f(x) = e^x|x^2 - 2x|$.
   Determinarne dominio, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e di convessià.
   Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Calcolare l'area sottesa alla curva nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Si consideri la funzione $y = f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$. Far vedere che la funzione è invertibile in $(1, e)$ e calcolare l'inversa $x = g(y)$. Si dica a cosa è asintoticamente equivalente la funzione $g(y) - 1$ per $y \to +\infty$.

Sol. 1 $f(x)$ è definita per le $x \in \mathbb{R}$. Non è né pari né dispari. È sempre non negativa (quindi limitata inferiormente da zero). Prende valore zero per $x = 2$ e $x = 0$, quindi minimo assoluto $\min f = 0$.
Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi la funzione è illimitata superiormente e dunque $\sup f = +\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (asintoto orizzontale).
Osserviamo che da definizione di modulo

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2)e^x & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 2 \\ -x(x-2)e^x & \text{se} \quad x \in (0, 2) \end{cases} .$$

La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 - 2) & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 2 \\ -e^x(x^2 - 2) & \text{se} \quad x \in (0, 2) \end{cases} .$$

In $x = 0$ ed $x = 2$ la funzione non è derivabile in quanto le derivate destra e sinistra esistono finite ma non coincidono. Sono $f' = \pm 2$ sinistra e destra in $x = 0$, rispettivamente, e $f' = \pm 2e^2$ destra e sinistra in $x = 2$, rispettivamente. Quindi $x = 0$ e $x = 1$ sono punti angolosi.
La derivata si annulla in $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Studiandone il segno di ha che la funzione cresce in $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ e $(2, +\infty)$, decresce in $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 2)$. I punti $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ sono punti di massimo relativo.
Distinguendo i casi, si ha che

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + 2x - 2) & \text{se} \quad x < 0 \ \text{ o } \ x > 2 \\ -e^x(x^2 + 2x - 2) & \text{se} \quad x \in (0, 2) \end{cases} .$$

Quest'ultima si annulla in $x = -1 + \sqrt{3}$ e $x = -1 - \sqrt{3}$. Gli intervalli di concavità sono $(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $(-1 + \sqrt{3}, 2)$, quelli di convessità $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$, $(0, -1 + \sqrt{3})$ e $(2, +\infty)$. La primitiva di f su $[1, 2]$ è data da $-e^x(x^2 - 4x + 4)$. La valutazione negli estremi dà quindi

$$\int_1^2 f(x)dx = e.$$

Sol. 2 La funzione è definita per $x > 0$, e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{2\log x - 2}{x \log^3 x}.$$

La funzione dunque è monotona crescente in $(0, 1)$ e (e, ∞), monotona decrescente in $(1, e)$. Quindi in $(1, e)$ è invertibile.
Per l'inversa si ponga $\frac{1}{\log x}$, quindi $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$. Pertanto risolvendo rispetto a t si ha $t = 1 \pm \sqrt{y}$, e quindi $x(y) = e^{\frac{1}{1\pm\sqrt{y}}}$. Per l'inversione sull'intervallo $(1, e)$ la scelta corretta è il segno positivo, quindi in definitiva

$$x = g(y) = e^{\frac{1}{1+\sqrt{y}}}$$

Per $y \to +\infty$, $e^{\frac{1}{1+\sqrt{y}}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{y}}$.